Algebra II
III appello - 19 giugno 2018
A.A. 2017/2018

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in F\}$. Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (2, 1, 3)$, $v_2 = (0, h, 2)$, $v_3 = (5, 7, 0)$, $v_4 = (0, 2, k)$, ed i sottospazi $W = < v_1 , v_2 >$ e $V = < v_3 , v_4 >$ di F^3.

(I) In funzione di h, k e della caratteristica di F :

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V ;

- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V ;

- si individui $dim\,(W + V)$ e si precisi quando $W + V = W \oplus V$.

(II) Posto $U = < v_1 , v_3 > = < (2, 1, 3), (5, 7, 0) >$, si descrivano gli elementi di U e :

- si determini, in funzione della caratteristica di F, la dimensione di U ;

- si verifichi che la posizione $\psi(\,(a, b, c) + U\,) = 7a - 5b - 3c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali; se ne discutano poi eventuali suriettività e iniettività. In caso di applicazione non iniettiva, si individuino elementi distinti del dominio con uguale immagine.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 10x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 14x + 6 \in \mathbb{Z}_p[x]\ .$$

(I) Si determini per quali valori di p l'elemento 1 è radice di $f(x)$, per quali valori lo è -1.

(II) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(***i***) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(***ii***) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $\mid E : \mathbb{Z}_p \mid$ e una $\mathbb{Z}_p$-base ;

(***iii***) si individui, per $p \neq 5$, una decomposizione in fattori di primo grado di $f(x)$ in $E[x]$.